تخمین شوک حرارتی در مسائل انتقال حرارت معکوس با استفاده از روش فیلترکالمن*

مهدی مولوی(۱)   احمد صداقت(۲)   محمد رضا سلیم‌پور(۳)

چکیده *در مقالهٔ حاضر تخمین شوک حرارتی در پروفیل شار حرارتی با داشتن توزیع دما به‌کمک فیلتر کالمن صورت پذیرفته است. برای این کار، ابتدا با محاسبهٔ توزیع دما و اعمال نویز به‌صورت مصنوعی سعی می‌شود تا به شرایط آزمایشگاهی اندازه‌گیری دما نزدیک شد. در ادامه با استفاده از روش فیلتر کالمن، به بررسی تخمین آنی شارحرارتی پرداخته می‌شود که به‌صورت شوک حرارتی در مسألهٔ مورد نظر ظاهر می‌شود. نتایج به‌دست آمده نشان می‌دهد که روش حاضر قادر است با دقت قابل قبول جهش شار حرارتی را تخمین بزند.*

واژه‌های کلیدی مسألهٔ انتقال حرارت معکوس، تخمین شار حرارتی، روش تخمین آنی، روش فیلتر کالمن.

Estimation of Heat Shocks in Inverse Heat Transfer Problems using Kalman Filtering

M. Molavi   A. Sedaghat   M.R. Salimpour

Abstract *In this paper, the heat shocks in the heat flux profile are estimated with known temperature distribution using Kalman filtering. For this task, the temperature distribution is calculated and artificial noise is added to adequately simulate the real temperature measurements. Next by using Kalman filtering, estimation of online heat flux is assessed which appears as heat shocks in the discussed problem. Results indicate that the present method can accurately estimate jumps in the heat flux.*

Key Words Inverse Heat Transfer Problem, Estimation of Heat Flux, Online Estimation Method, Kalman Filtering

*تاریخ دریافت مقاله ۹۲/٦/١٦ و تاریخ پذیرش آن ۹۳/۸/٤ می‌باشد.

(۱) کارشناس ارشد، دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان.

(۲) نویسندهٔ مسئول، استادیار، دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان. sedaghat@cc.iut.ac.ir

(۳) دانشیار، دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، دانشگاه صنعتی اصفهان.

مقدمه

مسائل انتقال حرارت معمولاً به دو دستهٔ مسائل انتقال حرارت مستقیم (DHCP) و مسائل انتقال حرارت معکوس (IHCP) تقسیم می‌شوند. مسائل هدایت حرارت مستقیم به مسائلی اطلاق می‌شود که در آنها هندسه، شرایط مرزی، شرایط اولیه، خواص ترموفیزیکی و هم‌چنین موقعیت و قدرت جمله‌های منبع در صورت وجود، معلوم باشد و هدف آن محاسبهٔ توزیع دما در داخل ناحیهٔ مورد بررسی با استفاده از حل معادلات حاکم باشد. معادلات حاکم نیز با مدل‌سازی پدیده‌های فیزیکی به‌کمک روابط ریاضی که معمولاً به‌صورت یک سری معادلات دیفرانسیل و یا روابط انتگرالی می‌باشند، به‌دست می‌آیند. مسائل هدایت حرارت مستقیم جزو مسائل خوش‌رفتار طبقه‌بندی می‌شوند. مسائل خوش‌رفتار که نخستین بار توسط هادامرد [1]، معرفی شدند به مسائلی اطلاق می‌شود که سه شرط وجود جواب، یکتایی جواب و پایداری نسبت به داده‌های ورودی را برآورده کنند [2-5]. در این گونه مسائل با حل معادلات حاکم می‌توان به توزیع دما در ناحیهٔ مورد نظر رسید. روش‌های حل مسائل مستقیم از سال‌ها پیش توسعه یافته‌اند.

مسائل هدایت حرارت معکوس به مسائلی اطلاق می‌شود که حداقل یکی از معلومات مسأله مستقیم مجهول باشد و باید تخمین زده شود و در عوض دمای برخی نقاط و یا شار حرارتی در داخل یا روی مرز ناحیهٔ مورد نظر از طریق اندازه‌گیری معلوم باشد. این نوع مسائل را می‌توان به یافتن علت از طریق اندازه‌گیری معلول بیان کرد. از مزایای روش‌های معکوس انتقال حرارت این است که در این روش نیاز به تحلیل میدان جریان اطراف جسم نیست زیرا با استفاده از حسگرهایی که در جسم کار گذاشته می‌شود دما اندازه‌گیری می‌شود. مقادیر تجربی معمولاً با خطای اندازه‌گیری همراه می‌باشد و این خطاها ممکن است موجب ناپایدار شدن مسألهٔ معکوس انتقال حرارت بشوند. مسائل انتقال حرارت معکوس شرط وجود جواب را برآورده می‌کنند، زیرا برای مثال در صورتی که تغییری در دماهای اندازه‌گیری شده برای یک جسم ایجاد شود، یک دلیل فیزیکی که همان شار حرارتی سطحی اعمال شده به جسم می‌باشد، وجود دارد. شرط یکتایی جواب را نیز می‌توان مانند مراجع [4, 5] اثبات کرد. اما مسائل معکوس حرارتی به خطاهای اندازه‌گیری حساس می‌باشند؛ درنتیجه برای بررسی وضعیت مسائل انتقال حرارت معکوس تنها باید این شرط را بررسی کرد.

شروع تحقیقات در زمینهٔ انتقال حرارت معکوس سال ١٩٥٦ بوده است. یکی از نخستین مقالات در این زمینه توسط اِستولز [6] در سال (١٩٦٠) انتشار یافت. در این مقاله، نحوهٔ محاسبهٔ نرخ انتقال حرارت در مورد اجسامی با شکل‌های ساده در فرآیند آب‌دهی بررسی شده است. میرسپاسی [7] در سال ١٩٥٩ این کار را با روشی مشابه برای اجسام نیمه بی‌نهایت با استفاده از روش‌های عددی و گرافیکی انجام داد. یکی دیگر از اولین مقالات در زمینهٔ انتقال حرارت معکوس مقاله‌ای روسی توسط شوماخوف [8] می‌باشد که در سال ١٩٥٧ به انگلیسی ترجمه شد. روش‌های انتقال حرارت معکوس به‌طور کلی در دو دسته قرار می‌گیرند: روش‌های تخمین آنی و روش‌های تخمین غیرآنی. روش تخمین متوالی تابع و روش فیلتر کالمن دو روش مهم در تخمین آنی می‌باشند. روش تخمین متوالی تابع از حدس توابع متوالی در زمان‌های آینده برای تخمین شار حرارتی استفاده می‌کند [9]. روش فیلتر کالمن نوعی روش تخمین متوالی است که به‌صورت پی‌درپی شار حرارتی را با الگوریتم خود در یک مرحله و به‌صورت آنی تخمین می‌زند [10]. این تکنیک یک روش بازگشتی است که با استفاده از ورودی داده‌های نویزدار، تابع (شار حرارتی) یا پارامتر

دلخواه را تخمین می‌زند [11]. در روش‌های غیرآنی از تمامی دماهای اندازه‌گیری شده برای تخمین تابع (شار حرارتی) استفاده می‌شود. این روش‌ها از فرآیند تکرار برای به‌دست آوردن جواب مسأله استفاده می‌کنند، لذا نیاز به حدس اولیه دارند. روش‌های گرادیانی با استفاده از گرادیان تابع هدف قادر هستند که فرآیند تکرار را به‌صورت اتوماتیک به انجام برسانند. روش‌های گرادیانی بیشترین کاربرد را در میان روش‌های غیرآنی برای تخمین تابع (شارحرارتی) و پارامتر دارا می‌باشند. روش‌های گوس- نیوتن ، بوکس- کانماسو ، لونبرگ- مارکوارت، گرادیان مزدوج و شبه نیوتنی جزء روش‌های گرادیانی به شمار می‌آیند. تخمین بسیاری از مسائل از جمله شارحرارتی با استفاده از سه روش اول توصیه نمی‌شود. در این بین روش گرادیان مزدوج و شبه نیوتنی بیشترین کاربرد را برای تخمین تابع (شارحرارتی) دارند. روش گرادیان مزدوج به دلیل پیدا کردن سریع بردار گرادیان مناسب در میان الگوریتم‌های معکوس انتقال حرارت بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرد [12].

تابع هدف برای این مسائل از تفاضل بین دمای اندازه‌گیری شده و نتایج به‌دست آمدهٔ حاصل از الگوریتم محاسباتی می‌باشد. در میان روش‌های غیرآنی برای حل چنین مسائلی روش‌های گرادیانی بیشتر استفاده شده است. روش‌های گوس‌نیوتن، بوکس‌کانماسو، لونبرگ‌مارکوارت، گرادیان‌مزدوج و شبه‌نیوتنی جزو روش‌های گرادیانی به‌شمار می‌آیند.

از معایب استفاده از روش‌های گرادیانی نسبت به روش‌های تخمین آنی در مرز متحرک به زمان‌بر بودن محاسبات می‌توان اشاره کرد که علت آن این است که مسألهٔ معکوس را نمی‌توان با معادلهٔ الحاقی کوپل کرد [13].

امروزه شاهد ارائه مقالات زیادی در زمینهٔ انتقال حرارت معکوس هستیم که در مراجع [14-15] به آن اشاره شده است و کار جدیدی که در سال ۲۰۱۳ با استفاده از روش فیلترکالمن انجام شده است که از این روش برای پیشگویی تغییرات ضخامت و تخمین شار حرارتی در حالت عملکردی راکتورها استفاده شد که در این جا مرز ما نیز متحرک است و بر حسب تغییرات دمایی که در مرز ما به‌وجود می‌آید سطح ما حرکت می‌کند [16]. (در مقاله جاری مرز متحرک بر اثر فرآیند فداشوندگی به‌وجود می‌آید که ناشی از تغییرات دما و فشار می‌باشد).

روش فیلتر کالمن با غلبه بر این مشکل باعث کاهش زمان محاسبات می‌شود و هم‌چنین در نقاطی از مسأله که محاسبهٔ آنی شار حرارتی مورد نیاز است به کار می‌رود. در بخش دوم این مقاله معادلات حاکم بر مسأله و حل با استفاده از روش مستقیم تشریح می‌شود. سپس در بخش سوم روش معکوس ارائه و روش فیلتر کالمن تشریح می‌شود. در بخش چهارم بررسی و تشریح نتایج ارائه می‌شود و در بخش پنجم به نتیجه‌گیری پرداخته می‌شود.

مسألهٔ مستقیم

فیزیک مسألهٔ در نظر گرفته شده شامل یک صفحهٔ یک‌بعدی با طول L، دمای اولیه $T_0(x)$ و شار حرارتی $q(t)$ در مختصات $x=0$ به آن وارد می‌شود. در $x=L$ میله در راستای طول عایق می‌باشد. جنس صفحه از مس می‌باشد. فرمول‌بندی ریاضی برای مسأله به‌صورت زیر ارائه می‌شود:

$$\frac{\partial T}{\partial t}=\alpha\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad , \quad 0\le x\le L(t) \qquad (۱)$$

$$-\kappa\frac{\partial T}{\partial x}=q(t) \quad , \quad x=0 \qquad (۲)$$

$$\frac{\partial T}{\partial x}=0 \quad , \quad x=L(t) \qquad (۳)$$

$$T(x,0)=T_0 \quad , \quad 0\le x\le L \qquad (٤)$$

معادلهٔ (۱) به‌صورت زیر گسسته‌سازی می‌شود:

$$\frac{T_i^{n+1}-T_i^n}{\Delta t}=\alpha\frac{T_{i+1}^{n+1}-2T_i^{n+1}+T_{i-1}^{n+1}}{\Delta x^2} \qquad (5)$$

با جداسازی دماهای جدید، ماتریس سه قطری برای حل به‌وسیلهٔ تکنیک فیلترکالمن به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\left(1-\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_{i+1}^{n+1}+\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}T_i^{n+1} -\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2}T_{i-1}^{n+1}=T_i^n \qquad (6)$$

با اعمال شرط مرزی شارحرارتی معادلهٔ (٦) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\left(1-\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_{i+1}^{n+1}+\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}T_i^{n+1} =\frac{2\alpha\Delta t}{\kappa\Delta x}q(t)+T_i^n \qquad (7)$$

و با اعمال شرط مرزی عایق بودن در معادلهٔ (٦) داریم:

$$\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}T_i^{n+1}+\left(1-\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2}\right)T_{i-1}^{n+1}=T_i^n \qquad (8)$$

که در قسمت حل به روش معکوس حرارتی شیوهٔ تخمین توزیع دما توضیح داده می‌شود.

روش معکوس

در مسألهٔ معکوس انتقال حرارت هدف تخمین شار حرارتی مجهول بر روی مرز متحرک است در حالی که دما از طریق اندازه‌گیری به‌وسیلهٔ ترموکوپل در مرز جسم معلوم باشد. در اکثر حالت‌ها و اشکال مختلف فیلترکالمن دو فرض اصلی وجود دارد که عبارتند از: مدل‌سازی خطی سیستم، فرض نویز گوسی. در فرض اول باید ابتدا معادلات غیرخطی با بردن به فضای حالت دینامیکی و تبدیل آن به حالت ماتریسی خطی-سازی شود. با در نظر گرفتن ماتریس حالت ψ و η به‌صورت زیر:

$$\psi=\begin{bmatrix} \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & 1-\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & & & 0 \\ -\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & \ddots & 1-\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & \ddots & 1-\frac{\alpha\Delta t}{\Delta x^2} \\ 0 & & & 1-\frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2} & \frac{2\alpha\Delta t}{\Delta x^2} \end{bmatrix}$$

و

$$\eta=\begin{bmatrix} \frac{2\alpha\Delta t}{\kappa\Delta x} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

معادلهٔ تخمین دما به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$T_k=\psi T_{k+1}-\eta q(t) \qquad (9)$$

که:

$$T_{k+1}=\varphi T_k+\Gamma q(t), \quad \varphi=\psi^{-1}\ ,\ \Gamma=\psi^{-1}.\eta \qquad (10)$$

که ϕ ماتریس انتقال حالت، Γ ماتریس ورودی و k اندیس زمانی می‌باشد. معادلهٔ منطبق بر اندازه‌گیری دما به‌صورت زیر ارائه می‌شود:

$$Z_k=H_kT_k+\nu_k \qquad (11)$$

که H_k ماتریس اندازه‌گیری و یک سیگنال اخلال‌گر است و از رابطهٔ زیر تعیین می‌شود:

$$H_k=[1\quad 0\quad 0\quad \cdots\quad 0] \qquad (12)$$

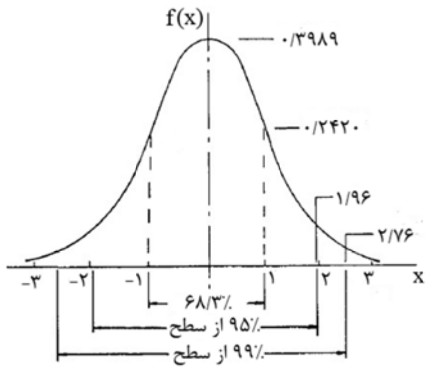
که در جایی که حسگر دما را اندازه‌گیری می‌کند مقدار H برابر با یک است و در بقیهٔ مکان‌ها صفر مـی‌باشـد. Z_k بردار مشاهده در زمان k می‌باشد، و υ_k بردار نـویز با فرض میانگین صفر و نویز گوسی سفید با واریـانس $E\{\upsilon_k.\upsilon_j^T\} = R\delta_{kj}$ می‌باشد کـه R واریـانس اغتشـاش است و δ_{kj} عملگر دلتای کرونکر می‌باشد. مقدار υ_k از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\nu_k = \omega_k \sigma \tag{۱۳}$$

خطاهـای انـدازه‌گیـری نیـز دارای توزیـع نرمـال (گوسـی) مـی‌باشــند. تـابع توزیـع احتمـال بـرای ε_i به‌صورت زیر می‌باشد:

$$f(\varepsilon_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{-\varepsilon_i^2}{2\sigma^2}\right) \tag{۱٤}$$

که ε_i خطای اندازه‌گیری می‌باشد که یک عدد تصادفی است.



شکل ۱ تابع چگالی نرمال استاندارد

در شکل (۱) تابع چگالی نرمـال اسـتاندارد ایجـاد شده براساس تابع فوق نشان داده شده است. بـا توجـه به این شکل ω اعداد تصادفی تولید شده می‌باشـد کـه ۹۹٪ آن در بازهٔ ۲/۷٦ تا ۲/۷٦- قرار خواهد داشت و σ انحراف استاندارد در خطای اندازه‌گیـری مـی‌باشـد (R مجذور σ است) که ناشی از خطـای انـدازه‌گیـری دمـا می‌باشد.

روش تخمین شـار حرارتـی بـا اسـتفاده از روش فیلتر کالمن شامل دو قسمت اسـت: اول فیلتـر کـالمن بـدون جملـه ورودی و دیگـری تخمـین‌زدن مجـذور مربعات بازگشـتی. نتـایج ایـن روش بـه‌صـورت زیـر می‌باشد [17]:

$$\overline{T}_{k/k-1} = \phi_k \overline{T}_{k-1} \tag{۱۵}$$

$$R_\varepsilon = H_k P_{k/k-1} H_k^T + R \tag{۱٦}$$

$$P_{k/k-1} = \phi_k P_{k-1} \phi_k^T + \Gamma_k Q \Gamma_k^T \tag{۱۷}$$

$$K_k = P_{k/k-1} H_k^T R_\varepsilon^{-1} \tag{۱۸}$$

$$P_k = (I - K_k H_k) P_{k/k-1} \tag{۱۹}$$

$$\overline{Z}_k = Z_k - H_k \overline{T}_{k/k-1} \tag{۲۰}$$

$$\overline{T}_k = \overline{T}_{k/k-1} + K_k \overline{Z}_k \tag{۲۱}$$

معـادلات (۲۱-۱۵) بـرای بـه‌دسـت آوردن دمـا و اختلاف بین دمای اندازه‌گیری و دمای فیلتر شده بـدون در نظر گرفتن ورودی (شار حرارتی) به‌کار مـی‌رود. K بهرهٔ کالمن است که یک کنترلگر به‌شمار مـی‌آیـد و بـا توجه به سایر پارامترها تعیین می‌شود.

معـادلات بـرای تخمـین زدن مجـذور مربعـات بازگشتی به‌صورت زیر است:

$$B_k = H_k(\phi_k M_{k-1} + I)\Gamma_k \tag{۲۲}$$

$$M_k = (I - K_k H_k)(\phi_k M_{k-1} + I) \tag{۲۳}$$

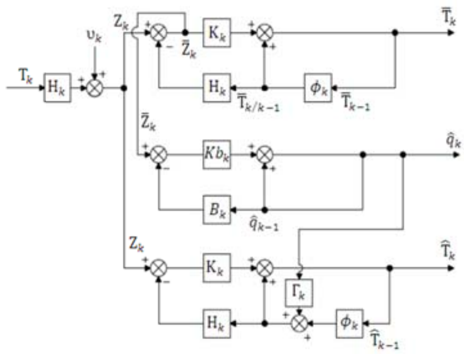
$$Kb_k = \gamma^{-1} Pb_{k-1} B_k^T \times (B_k \gamma^{-1} Pb_{k-1} B_k^T + R_\varepsilon)^{-1} \tag{۲٤}$$

$$Pb_k = (I - Kb_k B_k)\gamma^{-1} Pb_{k-1} \tag{۲۵}$$

$$\hat{q}_k = \hat{q}_{k-1} + Kb_k(\overline{Z}_k - B_k \hat{q}_{k-1}) \tag{۲٦}$$

$$\hat{T}_k = \overline{T}_k + M_k \Gamma_k \hat{q}_k \quad (۲۷)$$

در شکل (۲) نیز نمودار بلوکی این روش مشاهده می‌شود:



شکل ۲ نمودار بلوکی الگوریتم فیلتر کالمن

بررسی و تشریح نتایج

برای تخمین شار حرارتی از یک حسگر در مرزی که شار حرارتی به جسم وارد می‌شود برای اندازه‌گیری دما استفاده شده است. پروفیل شار حرارتی با استفاده از رابطهٔ زیر تعیین می‌شود:

$$q(t)=\begin{cases} 0 \\ , 0 \le t < 0.32 \text{ or } 0.44 \le t \le t_f \\ 20*(t-0.32)/0.04 \\ , 0.32 \le t < 0.36 \\ 20*(1-(t-0.36)/0.08) \\ , 0.36 \le t < 0.44 \end{cases} \quad (۲۸)$$

که با استفاده از پروفیل شارحرارتی، دما به‌صورت مستقیم و از معادلهٔ (۱۰) به‌دست می‌آید. سپس برای نزدیک شدن به شرایط آزمایشگاهی، از معادلهٔ نویز مصنوعی به دما اضافه کرده با استفاده از روش فیلتر کالمن شار حرارتی به‌صورت معکوس تخمین زده می‌شود.

شرایط شبیه‌سازی و پارامترهای معلوم در این ماده به‌صورت زیر می‌باشد:

گام زمانی (Δt=0.008 s)، ضخامت صفحهٔ مس (L=0.5 cm)، گام مکانی (Δx=0.005 cm)، ضریب نفوذ حرارت (α=0.1804 $cm^2 . s^{-1}$)، ضریب هدایت حرارت (κ=0.145696 $cal.cm^{-1}.s^{-1}.^oC$)

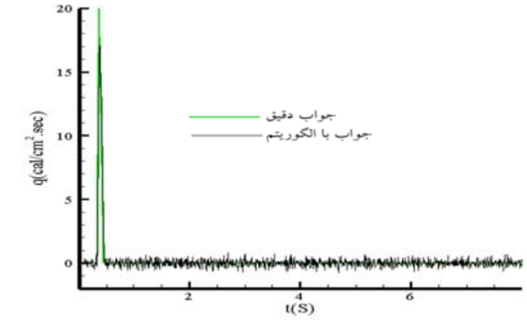
بایاس ناشی از انحراف شار حرارتی دقیق (q_k) و شار حرارتی تخمین زده شده ($\hat{q}_k$) به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\text{Bias}=\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(q_k-\hat{q}_k)^2\right]^{\frac{1}{2}} \quad (۲۹)$$

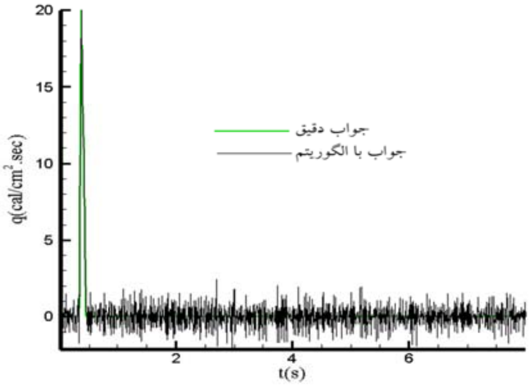
در این الگوریتم مقدار چهار پارامتر σ، γ، Q و Pb_0 در جواب $\hat{q}_k$ تأثیرگذار است.

Pb_0 مقدار اولیه کوواریانس خطا در الگوریتم تخمین‌زدن مجذور مربعات بازگشتی است که هر چه بزرگ‌تر باشد اغتشاشات جواب $\hat{q}$ در لحظات اولیه زیاد خواهد بود و مدت زمانی طول می‌کشد تا الگوریتم، این اغتشاشات را از بین ببرد. هم‌چنین هرچه مقدار Pb_0 به صفر نزدیک‌تر باشد مقدار Kb_k در لحظات اولیه کوچک شده و اثر تغییرات دما در الگوریتم فیلتر کالمن تأثیر کمی بر مقدار $\hat{q}_k$ خواهد داشت و جواب از مقدار واقعی فاصله می‌گیرد. مقدار Pb_0 در این مقاله 10^{-5} در نظر گرفته شده است.

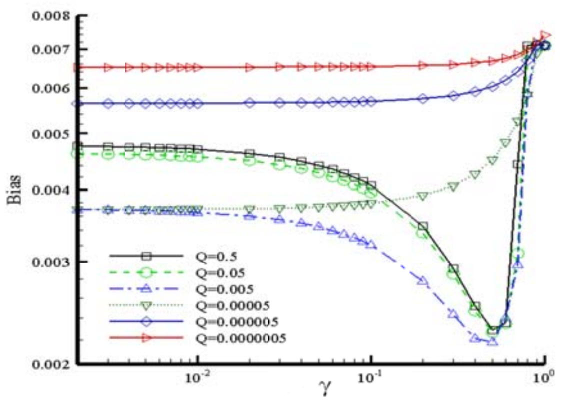
با افزایش مقدار Q مقدار اغتشاش در تخمین شار حرارتی افزایش می‌یابد. در شکل (۳) شار حرارتی تخمین زده شده با روش فیلترکالمن مشاهده می‌شود، همان‌طور که می‌بینیم در لحظه‌ای که شوک ناگهانی حرارتی به جسم وارد می‌شود الگوریتم در تخمین نقطهٔ ماکزیمم مقدار کمی خطا دارد، با نتیجه‌گیری از شکل (٤) که در آن مقدار کوواریانس را افزایش دادیم الگوریتم به‌خوبی نقطهٔ ماکزیمم پروفیل شار حرارتی را تخمین می‌زند اما مقدار اغتشاشات وارد بر جواب افزایش می‌یابد که باعث افزایش بایاس می‌شود.



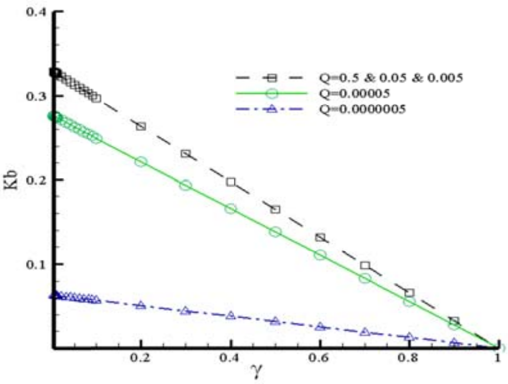
شکل ۳ نمودار تخمین شار حرارتی برحسب زمان با σ=0.1، γ=0.5 و Q=0.001



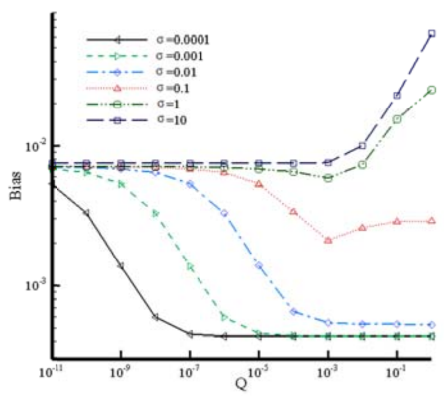
شکل ٤ نمودار تخمین شار حرارتی برحسب زمان با σ=0.1، γ=0.5 و Q=0.05



شکل ۵ تغییرات بایاس برحسب فاکتور فراموشی و کوواریانس‌های مختلف با σ=0.1



شکل ٦ تغییرات بهره کالمن برحسب فاکتور فراموشی و کوواریانس‌های مختلف با σ=0.1



شکل ٧ تغییرات بایاس بر حسب کوواریانس و انحراف استانداردهای مختلف با σ=0.1

در شکل (٥) نمودار فاکتور فراموشی برحسب کوواریانس‌های مختلف نشان داده شده است. نکات مهم در مورد این نمودار این است که بایاس کمینه در $Q = 0.005$ اتفاق می‌افتد و در استفاده از مقادیر دیگر کوواریانس به جز نقاط خاص فاکتور فراموشی مقدار بایاس افزایش می‌یابد. هم‌چنین با دقت در این نمودار مقدار بایاس کمینه در کوواریانس‌های ٠/٥، ٠/٠٥ و ٠/٠٠٥ اتفاق می‌افتد. هم‌چنین فاکتور فراموشی مناسب نزدیک عدد ٠.٥ اتفاق می‌افتد، پس هر مقدار فاکتور فراموشی را نمی‌توان به‌صورت تصادفی انتخاب کرد و باید با توجه به پارامترهای دیگر تعیین شود.

در شکل (٦) تغییرات بهره کالمن برحسب فاکتور فراموشی برای کوواریانس‌های مختلف نمایش داده شده است. با افزایش بهره کالمن پهنای باند زیاد می‌شود و این افزایش باعث افزایش دامنهٔ اغتشاشات می‌گردد، هم‌چنین بهره کالمن رابطهٔ معکوس با فاکتور فراموشی دارد که با توجه به این شکل و در نظر گرفتن فاکتور فراموشی بهینه از شکل (٦) بهره کالمن در ٠/١٧ اتفاق می‌افتد.

شکل (٧) تغییرات بایاس شار حرارتی را برحسب انحراف استاندارد و کواریانس دمای اندازه‌گیری شده مختلف نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود کواریانس و واریانس ($R=\sigma^2$) اغتشاشات دمای اندازه‌گیری شده به‌هم وابسته می‌باشند، پارامتر Q

کوواریانس اغتشاش ورودی در الگوریتم فیلتر کالمن است و اگر بسیار بزرگ انتخاب شود باعث افزایش اغتشاشات در جواب می‌گردد و اگر خیلی کوچک انتخاب شود باعث ایجاد تأخیر زمانی و عدم تخمین مناسب نقطهٔ ماکزیمم شار حرارتی می‌گردد. از طرفی این پارامتر باید با توجه به واریانس اغتشاشات دمای اندازه‌گیری شده تعیین شود. پس با افزایش واریانس دما، مقدار کواریانس ورودی برای به‌دست آوردن بایاس بهینه باید افزایش یابد.

نتیجه‌گیری

در بخش قبل نشان داده شد که فیلتر کالمن روشی است که با استفاده از آن می‌توان شار حرارتی را به‌صورت آنی تخمین زد و با توجه به این موضوع می‌توان از این روش برای طراحی حسگرهای شارسنج استفاده کرد. نکات مهم در استفاده از این روش عبارتند از:

۱. انتخاب منطقی پارامترهای σ، γ و Q باعث کاهش بایاس می‌شود و مکانی که شوک حرارتی ایجاد می‌گردد به‌خوبی تخمین زده می‌شود.
۲. با افزایش کوواریانس مقدار اغتشاشات زیاد و با کاهش آن مقدار اغتشاش کم می‌گردد و باعث می‌شود که الگوریتم در تخمین مکان شوک حرارتی ضعیف عمل کند. از طرفی این پارامتر باید با توجه به انحراف استاندارد تعیین شود که با افزایش انحراف استاندارد برای رسیدن به بایاس بهینه باید مقدار کوواریانس افزایش یابد.
۳. مقدار فاکتور فراموشی بهینه با توجه به کوواریانس و بایاس کمینه تعیین می‌شود.

تشکر و قدردانی

نویسندگان این اثر صمیمانه از راهنمایی‌ها و هم‌فکری‌های آقای مهندس حسین مولوی کمال تشکر و قدردانی را دارند.

فهرست نمادها و نشانه‌ها

نشانه‌های لاتین

ماتریس حساسیت	B
واریانس	E
ماتریس اندازه‌گیری	H
ماتریس واحد	I
بهره کالمن	K
بهره کالمن اصلاح شده	Kb
طول میله، (m)	L
ماتریس حساسیت	M
ماتریس خطای کواریانس فیلتر شده	P
ماتریس خطای کواریانس	Pb
کوواریانس	Q
شارحرارتی دقیق، (W/cm^2)	q
واریانس دمای اندازه‌گیری	R
واریانس مازاد	R_ε
دما، (K)	T
دمای اولیه، (K)	T_0
زمان	t
بردار مشاهده	Z
متغیر مکان	X
ماتریس انتقال حالت	Φ
ماتریس ورودی	Γ
انحراف استاندارد	σ
فاکتور فراموشی	γ
ضریب هدایت حرارتی، (W/m.K)	κ
عملگر دلتای کرونکر	δ

بالانویس‌ها

مقدار تخمین زده شده با الگوریتم	^
مقدار تخمین زده شده بدون شار حرارتی	–

زیرنویس‌ها

اندیس زمانی	k

مراجع

1. J. Hadamard, J., "*Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations*", Yale University Press, New Haven, CT, (1923).
2. Tikhonov, A.N., Arsenin, V.Y., "*Solution of Ill-Posed Problem*", Winston and Sons, Washington, DC, (1977).
3. Alifanov, O. M., "Solution of an Inverse Problem of Heat Conduction by Iteration Methods", *J. Eng. Phys.*, vol. 26, no. 4, pp. 471-475, (1974).
4. Alifanov, O.M., "*Inverse Heat Transfer Problems*", Springer-Verlag, New York, (1994).
5. Beck, J.V., Blackwell, B. and Clair, C.R.St., "*Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems*", Wiley Interscience, New York, (1985).
6. Stolz, G.Jr., "Numerical Solutions to an Inverse Problem of Heat Conduction for Simple Shapes", Journal Heat Transfer, 82, pp. 20-26, (1960).
7. Mirsepassi, T.J., "Heat-Transfer Charts for Time-Variable Boundary Conditions", British Chemical Engineering. 4, pp. 130-136, (1959).
8. Shumakov, N.V., "A Method for the Experimental Study of the Process of Heating a Solid Body", *Soviet Physics Technical Physics* (Translated by American Institute of Physics), 2, pp. 771-780, (1957).
9. Beck, J.V. and Arnold, K.J., "*Parameter Estimation in Engineering and Science*", Wiley: New York, (1977).
10. Kalman, R.E., "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems", *ASME Journal of Basic Engineering*, 82, pp. 35–45, (1960).
11. Kalman, R.E. and Bucy, R.S., "New Results in Linear Filtering and Prediction Theory", *ASME Journal of Basic Engineering*, 83, pp. 95-108, (1961).
12. Molavi, H., Hakkaki-Fard, A., Rahmani, R.K., Ayasoufi, A. and Molavi, M., "A Novel Methodology for Combined Parameter and Function Estimation Problems", ASME Journal of Heat Transfer, 132, No. 12, p. 121301, (2010).
13. Molavi, H., Hakkaki-Fard, A., Molavi, M., Rahmani, R.K., Ayasoufi, A. and Noori. S., "Estimation of Boundary Conditions in the Presence of Unknown Moving Boundary Caused by Ablation", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 54, pp. 1030-1038, (2011).
14. Kowsari, F. and Nazari, M., "A Feasibility Study of Employing Sequential Function Specification Method for Estimation of Transient Heat Flux in a Non-Thermal Equilibrium Porous Channel", *Journal of Porous Media*, 14(5), (2010).
15. Nazari, M., Farahani, S. D. and Kowsary, F., "Comparison of the Mollification and Wavelet Prefiltering of Temperature Data in an Ill-Posed Inverse Heat Conduction Problem, Application: Nonthermal Equilibrium Porous Medium", *Heat Transfer Engineering*, 33(8), 704-711, (2012).
16. Lebreux, M., Desilets, M., Lacroix, M. "An unscented Kalman filter inverse heat transfer method for the prediction of the ledge thickness inside high- temperature metallurgical reactors", *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 57, pp. 265-273, (2013).
17. Franklin, G.F., Powell, J.D. and Workman, M.I., "Digital Control of Dynamic Systems", 2nd ed. Addision Wesley, Reading, MA, (1990).